

**Banco de Ejemplos Desarrollados para la Guía de Admisión
Doctorado en Física**

(Programa reconocido en el Sistema Nacional de Posgrados, valoración 2025)

Objetivo

El presente compendio recopila ejemplos prácticos de desarrollo de temas de la guía de admisión. Ha sido elaborado de forma solidaria y voluntaria por estudiantes aprobados y actualmente adscritos al programa, fungiendo como un mecanismo transparente de retribución social y cooperación interinstitucional.

Nuestro Doctorado en Física se destaca por la alta calidad y reconocimiento nacional e internacional de nuestros investigadores adscritos al SNII, así como por el talento indudable de nuestros jóvenes investigadores en formación. Como un programa de excelencia que cuenta con capacidades académicas de vanguardia, asumimos la responsabilidad de formar científicos de primer nivel. El propósito central de este documento es dotar a la siguiente comunidad de aspirantes las herramientas metodológicas de forma homogénea. De esta forma, nuestro programa de Doctorado busca mitigar la exclusión histórica y democratizar el acceso al conocimiento de frontera en las ciencias físicas.

Este material se alinea con el Artículo 6, Fracción III de los actuales Lineamientos del Sistema Nacional de Posgrados (SNP) de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación. Dicha normativa mandata favorecer el acceso a los programas de posgrado mediante acciones que promuevan la inclusión e igualdad sustantiva. De este modo, el programa coadyuva a la construcción de un “ piso parejo ” que mitiga progresivamente las brechas de desigualdad en el ingreso a la comunidad científica.

Mtro. Juan Becerra Zamudio
Mtro. Galo Salvador Díaz Andrade
Mtro. Uriel Alessandro Barajas Sánchez

1. Mecánica Clásica

Ejemplo de pregunta:

¿Cuáles son las formulaciones de la mecánica clásica?

Respuesta:

La mecánica clásica se puede abordar principalmente desde tres marcos teóricos equivalentes:

- **Formulación Newtoniana:** Se basa en el concepto de fuerza y rige la dinámica de los sistemas mediante las tres leyes de Newton:

- **Primera ley:** Si la fuerza total sobre una partícula es cero, su momento lineal $\mathbf{p}$ se conserva ($\mathbf{p} = 0$). Los sistemas de referencia donde esta ley se cumple son llamados 'inerciales' y constituyen el marco de validez para las siguientes leyes.
- **Segunda ley:** El cambio temporal del momento lineal es igual a la fuerza neta aplicada, expresado como una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}}$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

- **Tercera ley:** Las fuerzas que dos partículas ejercen mutuamente entre sí son iguales y opuestas (*forma débil*). Si, adicionalmente, estas fuerzas actúan a lo largo de la línea que une a ambos cuerpos, se cumple la *forma fuerte* de la ley.
- **Formulación Lagrangiana:** Esta formulación opera en el *espacio de configuración* de n dimensiones definido por un conjunto de coordenadas generalizadas independientes q_j y sus derivadas temporales, las velocidades generalizadas $\dot{q}_j$. La dinámica del sistema se deduce a partir del principio de Hamilton, que establece que el movimiento de un sistema entre los tiempos t_1 y t_2 es tal que minimiza la acción.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0$$

El lagrangiano (L) se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, $L = T - V$. Este principio conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

- **Formulación Hamiltoniana:** Describe el sistema utilizando los momentos generalizados p_j , definidos a partir del lagrangiano como:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

A partir de esta definición, se construye la función de energía (Hamiltoniano $H = T + V$) mediante una transformada de Legendre:

$$H(q, p, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q}, t)$$

En este formalismo las n ecuaciones diferenciales de segundo orden de Lagrange se reemplazan por un sistema equivalente de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden que describen la evolución temporal de las coordenadas q_k y los momentos p_k , las ecuaciones canónicas de Hamilton:

$$\begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ -\dot{p}_k &= \frac{\partial H}{\partial q_k}\end{aligned}$$

Ejemplo de pregunta:

Describe el teorema de Noether

Respuesta:

El teorema de Noether conecta las propiedades de invarianza del Lagrangiano y las cantidades conservadas de un sistema físico. Establece que si la integral de acción es invariante bajo transformaciones continuas de las coordenadas y las variables del campo, entonces existen cantidades conservadas asociadas.

Si se somete un sistema a transformaciones infinitesimales en el tiempo ($\delta t = \epsilon_r X_r$) y en las coordenadas generalizadas ($\delta q_k = \epsilon_r \Psi_{rk}$), la conclusión del teorema de Noether se expresa mediante la siguiente ecuación de conservación:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) X_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Psi_{rk} \right] = 0$$

A partir de esta única ecuación general se pueden deducir los teoremas de conservación fundamentales de la mecánica:

- **Conservación de la energía:** Si la transformación corresponde exclusivamente a un desplazamiento en el tiempo ($X_r = \delta_{r1}$, $\Psi_{rk} = 0$), el teorema demuestra que la integral de Jacobi se conserva constante en el tiempo.
- **Conservación del momento:** Si el sistema posee una coordenada cíclica q_l y la transformación corresponde a un desplazamiento sobre dicha coordenada ($X_r = 0$, $\Psi_{rk} = \delta_{kl}\delta_{rl}$), se deduce que su momento canónico conjugado asociado se conserva.

Otros ejemplos de pregunta:

- *¿Qué es una onda?*
- *¿Qué es una onda estacionaria?*
- *¿Cuál es la diferencia entre oscilar y vibrar?*
- *Describe la ecuación de onda*

2. Termodinámica

Ejemplo de pregunta:

¿Qué es la entropía y cómo se relaciona con la segunda ley de la termodinámica?

Respuesta:

La primera ley establece la relación que debe existir entre la energía interna de un sistema y sus alrededores lo cual nos sirve para acotar el tipo de procesos que pueden ocurrir a nivel macroscópico, sin embargo hay algo importante NO TODOS los procesos que satisfacen la primera ley son posibles es ahí donde entra la segunda ley, para imponer restricciones sobre el tipo de sistemas macroscópicos que podemos estudiar. La termodinámica es fenomenológica, por tanto estas restricciones adicionales se basan en la observación.

Esas restricciones observacionales surgieron del estudio de las máquinas térmicas y su eficiencia. Si se extrae calor de un reservorio caliente Q_H , se entrega trabajo W y el calor restante se deposita en un reservorio a una menor temperatura Q_L la eficiencia se define como

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H}$$

En cualquier máquina, siempre se pierde algo de calor hacia el reservorio frío. Es decir, nunca se logra convertir todo el calor absorbido en trabajo. Esa es la restricción observada: $\eta < 1$, siempre.

Pero existe una máquina que opera bajo un proceso reversible particular, la cual siempre resulta ser la más eficiente posible entre dos reservorios que operan a temperaturas fijas: la máquina de Carnot. Todas las máquinas reversibles entre esas mismas dos temperaturas tienen exactamente la misma eficiencia, sin importar de qué estén hechas. Esto sugiere que el límite $\eta < 1$ no depende de los detalles de la máquina, sino únicamente de las temperaturas de los reservorios, lo cual permite definir una escala de temperatura absoluta a partir de esta eficiencia límite:

$$\eta = 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

Entonces, se encontró una cantidad que se denominó entropía, la cual permitió formalizar estas restricciones observadas para los sistemas.

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

La entropía es una variable termodinámica, tan bien definida como la energía interna o el volumen, con la propiedad de que en un sistema aislado nunca disminuye lo cual restringe el número de sistemas que podemos estudiar.

Desde la perspectiva de los *postulados de la termodinámica* la entropía es una función univaluada de las variables extensivas que determinan algún estado termodinámico, esta existe para todos los estados y tiene la propiedad de que los valores que asumen las variables extensivas, en ausencia de restricciones internas, son aquellos que maximizan la entropía. Además, es una función continua, diferenciable y monótonamente creciente de la energía interna U .

Ejemplo de pregunta:

¿Qué son y cuáles son las condiciones de estabilidad termodinámica?

Respuesta:

Cuando un sistema aislado alcanza el equilibrio, sabemos que la entropía es un extremo respecto a las variables que quedaron libres: eso es lo que dan las condiciones de equilibrio térmico, mecánico y químico ($T_1 = T_2$, $P_1 = P_2$, $\mu_1 = \mu_2$). Estas condiciones pueden deducirse del hecho de que los valores que asumen las variables extensivas, en ausencia de restricciones internas, son aquellos que maximizan la entropía.

Por ejemplo, si tenemos un sistema compuesto cerrado, formado por dos subsistemas S_1 y S_2 separados por una pared adiabática, fija e impermeable (estas son las restricciones), al retirar una restricción hacemos que la pared sea diatérmica.

$$U_1 + U_2 = 0 \rightarrow dU_1 = -dU_2$$

después de cierto tiempo el sistema alcanza un nuevo estado de equilibrio donde la entropía se maximiza, por lo que

$$dS = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dU_1 = 0$$

dando origen al EQUILIBRIO TÉRMICO $T_1 = T_2$.

Pero que la primera derivada sea anula no basta para garantizar que ese equilibrio sea físicamente realizable: un extremo puede ser un máximo o un mínimo, y solo el máximo corresponde a un equilibrio estable.

Para asegurarnos de que realmente estamos en un máximo, hay que ir a la segunda derivada, la condición de estabilidad es que la entropía sea una función cóncava de las variables extensivas U, V, N (de forma equivalente, que la energía interna sea convexa en S, V, N). Físicamente, esto es lo que garantiza que el equilibrio sea estable: si el sistema se aparta ligeramente de ese estado, la entropía disminuye respecto al máximo, así que el sistema es empujado de vuelta al equilibrio en lugar de alejarse más.

Esta noción de concavidad/convexidad no es exclusiva de S y U : cada potencial termodinámico hereda esta misma condición de estabilidad, pero el sentido (cóncavo o convexo) depende de si la variable en cuestión es extensiva o intensiva. Esto es consecuencia directa de cómo se construyen los potenciales.

Criterio de estabilidad (energía interna). La energía interna es una función convexa en S , V y N .

Mientras que para los demás potenciales:

Entalpía	Convexa en S y N ; cóncava en P
Helmholtz	Convexa en V y N ; cóncava en T
Gibbs	Convexa en N ; cóncava en T y P

Esta condición de concavidad se traduce en restricciones concretas sobre cantidades medibles: por ejemplo, para que el equilibrio térmico sea estable se necesita $C_V > 0$, y de forma más general también $C_P > 0$ y $\kappa_T > 0$ (la compresibilidad isotérmica positiva), además de $C_P > C_V$. Todas estas son, en el fondo, la misma idea aplicada a distintos pares de variables: un sistema estable responde a una perturbación de manera que tiende a contrarrestarla, no a amplificarla.

¿Qué pasa cuando estas condiciones se rompen?

Respuesta:

Si las condiciones de estabilidad dejan de cumplirse, deja de ser posible tener una única fase homogénea del sistema que sea estable en todo el rango de temperaturas o presiones considerado. En ese caso el sistema resuelve el problema separándose en más de una fase que coexisten simultáneamente: eso es una transición de fase. Una transición de fase ocurre cuando, al variar T o P , dejan de cumplirse los criterios de estabilidad de forma continua.

Estas transiciones se reconocen porque aparecen discontinuidades en ciertas propiedades del sistema. Si la transición es de primer orden, propiedades como el volumen o la entropía molar cambian bruscamente al pasar de una fase a otra. Esta discontinuidad es justamente lo que da lugar al calor latente: en la coexistencia, ambas fases tienen el mismo potencial químico (por eso pueden coexistir en equilibrio), pero tienen distinta entropía molar, $s^{(x)} \neq s^{(y)}$. Entonces, para convertir materia de una fase a otra a lo largo de la curva de coexistencia — es decir, sin salir del equilibrio — el sistema necesita cerrar esa diferencia de entropía de algún lado, y la única forma de hacerlo sin cambiar ni T ni P es intercambiando una cantidad de calor bien definida:

Por eso, mientras dura la transición, todo el calor que se le entrega al sistema se invierte en reorganizar la materia de una fase a otra (por ejemplo, romper el orden que mantiene unidas a las moléculas en el sólido o el líquido) y no en aumentar la temperatura: el sistema se mantiene exactamente sobre la curva de coexistencia, en equilibrio entre las dos fases, hasta que toda la sustancia terminó de convertirse. Solo entonces, con una sola fase presente otra vez, un calor

adicional vuelve a traducirse en un cambio de temperatura.

Lo mismo ocurre con el volumen, la discontinuidad que ocurre en este se debe a la diferencia en la estructura de las moléculas que se tienen en las dos fases distintas, por ejemplo, en una transición líquido-vapor el volumen de la fase vapor v_g es menor que el volumen de la fase líquida v_l , o equivalentemente las densidades moleculares cumplen $\rho_v < \rho_l$ ya que un gas es menos denso debido a la poca estructura molecular, a diferencia de un líquido.

Si la transición es de segundo orden, el volumen y la entropía sí son continuos, pero son las funciones de respuesta, como C_P o la compresibilidad, las que se vuelven discontinuas o divergen justo en la transición.

¿Y qué sucede cuando tienes más de una sustancia coexistiendo, qué nos puedes decir al respecto?

Respuesta:

Cuando hay varias fases coexistiendo, y posiblemente varias sustancias, no cualquier combinación de temperatura y presión permite que esa coexistencia se mantenga: hay un número limitado de variables que realmente se pueden ajustar libremente. Eso es justo lo que cuantifica la regla de fases de Gibbs,

$$\gamma_F = 2 + M - R,$$

donde M es el número de especies presentes y R el número de fases que coexisten. γ_F nos dice cuántos grados de libertad tenemos, es decir, cuántas variables (por ejemplo, temperatura y presión) puedo variar independientemente sin romper la coexistencia.

Para una sustancia pura como el agua, $M = 1$. Si tengo dos fases coexistiendo (por ejemplo, líquido y vapor), $R = 2$ y por lo tanto $\gamma_F = 1$: solo puedo variar una variable libremente, y la otra queda determinada por la primera (vemos una curva en el diagrama P-T). Y si tengo tres fases coexistiendo a la vez (sólido, líquido y vapor), $R = 3$ y $\gamma_F = 0$: ya no puedo variar nada, la temperatura y la presión quedan completamente fijas (vemos un punto en el diagrama P-T, como el punto triple).

En general, mientras más especies distintas tengo en el sistema, más grados de libertad gano, así que la coexistencia deja de estar tan restringida como en el caso de una sola sustancia.

Otros ejemplos de pregunta:

- *Describe los potenciales termodinámicos y cómo se transforma de uno a otro (transformaciones de Legendre).*
- *¿Qué es la temperatura de Curie y qué papel tiene en las transiciones de sustancias con propiedades magnéticas?. Describe las características de un paramagneto y un ferromagneto.*

3. Electrodinámica

Ejemplo de pregunta:

¿Escribe las ecuaciones de Maxwell?

Respuesta:

Las cuatro ecuaciones fundamentales del electromagnetismo son

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

¿Existe alguna invarianza que estas ecuaciones cumplan?

Respuesta:

Si, Los potenciales electromagnéticos no están definidos de forma única. Dos conjuntos de potenciales describen los mismos campos si difieren mediante una transformación de gauge,

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda, \quad V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t},} \quad (5)$$

donde $\lambda(\vec{r}, t)$ es una función arbitraria.

Las elecciones de gauge más utilizadas son:

■ **Gauge de Coulomb**

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (6)$$

En este gauge el potencial escalar satisface una ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7)$$

Es especialmente útil en problemas cuasiestáticos.

■ Gauge de Lorenz

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (8)$$

Ejemplo de pregunta:

¿Qué es el Teorema de Poynting?

Respuesta:

Hay una idea importante de entender para describir el Teorema de Poynting y lo que nos dice. Esta idea es que los campos eléctrico y magnético pueden almacenar energía. Esto se estudia con claridad en el caso electrostático, donde podemos ver cómo, partiendo del caso discreto en el que el trabajo necesario para crear una configuración de N cargas se calcula de forma aditiva, sumando el trabajo necesario para traer cada carga venciendo el campo electrostático que ya crean las cargas presentes y pasando al caso continuo, llegamos a

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{todo el espacio}} E^2 dV.$$

Lo que obtenemos es que hay una densidad de energía asociada al campo electrostático. Es decir,

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2,$$

nos dice que cuánta energía hay en cada punto del espacio: el campo eléctrico almacena energía, y esa energía está distribuida en todo el espacio solo debido al campo, no solo donde se encuentran las fuentes.

Así, una de las partes importantes para entender el teorema de Poynting es que existe una densidad de energía electromagnética asociada a los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$,

$$u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}).$$

Lo siguiente para entender el teorema de Poynting es entender que la energía electromagnética

puede fluir, y la dirección en la que fluye está dada por el vector de Poynting,

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

La dirección de $\vec{S}$ indica hacia dónde viaja la energía en ese punto del espacio, y la magnitud de $\vec{S}$ te dice qué tan rápido viaja esa energía.

Finalmente, la energía que tienen los campos la pueden transferir a las cargas o fuentes presentes en el material. Esta transferencia está descrita por el término $\vec{J} \cdot \vec{E}$, la potencia por unidad de volumen que el campo entrega a las cargas en movimiento.

Así, el Teorema de Poynting nos dice que:

Si la energía almacenada en los campos disminuye, es o porque fluyó hacia otra región del espacio, o porque se transfirió a las cargas. Es decir, el Teorema de Poynting es una ley de conservación de energía electromagnética.

En forma integral,

$$-\frac{d}{dt} \int_V u \, dV = \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{A} + \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV,$$

o visto en su forma diferencial, como ecuación de continuidad LOCAL

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{S} + \vec{J} \cdot \vec{E}.$$

Ejemplo de pregunta:

¿Cuál es la formulación covariante del electromagnetismo?

Respuesta:

La formulación covariante del electromagnetismo unifica las ecuaciones de Maxwell en un lenguaje compatible con la relatividad especial. El potencial escalar y el potencial vectorial se combinan en el cuadripotencial

$$A^\mu = \left(\frac{V}{c}, \mathbf{A} \right), \tag{9}$$

mientras que la densidad de carga y la corriente forman el cuadvivector

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J}). \quad (10)$$

El tensor electromagnético se define como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (11)$$

cuyas componentes contienen a los campos eléctrico y magnético,

$$F^{0i} = -\frac{E_i}{c}, \quad F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k. \quad (12)$$

La acción electromagnética en presencia de una corriente externa es

$$S[A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \right). \quad (13)$$

Al variar la acción respecto al potencial A_μ se obtienen las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell,

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu.} \quad (14)$$

Las ecuaciones homogéneas provienen de la identidad de Bianchi,

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \quad (15)$$

la cual es equivalente a

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (16)$$

Tomando la divergencia de las ecuaciones de Maxwell se recupera automáticamente la

conservación de la carga,

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (17)$$

Otros ejemplos de pregunta:

- *¿Cómo se obtiene la ecuación de onda electromagnética a partir de las ecuaciones de Maxwell?*
- *Con base en lo anterior, ¿cómo se relaciona la velocidad de la luz con la permitividad y permeabilidad del vacío?*

4. Mecánica Cúantica

Ejemplo de pregunta:

¿Cuáles son los postulados de la mecánica cúantica?

Respuesta:

- El estado físico de un sistema está completamente descrito por un vector normalizado $|\psi\rangle$ perteneciente a un espacio de Hilbert complejo y dos vectores que difieren por una fase global representan el mismo estado físico
- Toda magnitud física observable A está representada por un operador hermítico $\hat{A}$ que actúa sobre H . Los posibles resultados de una medición son los autovalores a_n de dicho operador:

$$\hat{A} |a_n\rangle = a_n |a_n\rangle \quad (18)$$

La hermiticidad garantiza que los resultados medibles sean reales.

- Si el sistema está en el estado $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener el resultado a_n al medir A es

$$P(a_n) = |\langle a_n | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle \quad (19)$$

El valor esperado es

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad (20)$$

- Tras obtener el resultado a_n , el estado del sistema cambia a

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{\hat{P}_n |\psi\rangle}{\langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle} \quad (21)$$

- Mientras no se realiza una medición, la evolución temporal es unitaria y está gobernada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (22)$$

- Si un sistema está formado por dos subsistemas A y B , su espacio de estados es el producto tensorial

$$H = H_A \otimes H_B \quad (23)$$

Ejemplo de pregunta:

¿Cómo se describen los sistemas de espín 1/2 y cuáles son las propiedades de sus operadores?

Para una partícula de espín 1/2, podemos elegir los eigenestados de S_z como base:

$$S_z |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle, \quad S_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle. \quad (24)$$

En esta base,

$$S_z = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|). \quad (25)$$

Podemos definir los operadores de subida y bajada mediante

$$S_+ = \hbar |+\rangle \langle -|, \quad S_- = \hbar |-\rangle \langle +|. \quad (26)$$

Estos operadores cambian el estado de espín en una unidad de $\hbar$.

Los otros componentes del espín pueden escribirse como

$$S_x = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +|), \quad (27)$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} (-i |+\rangle \langle -| + i |-\rangle \langle +|). \quad (28)$$

Los eigenestados de S_x son

$$|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle), \quad |S_x; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle), \quad (29)$$

mientras que los eigenestados de S_y son

$$|S_y; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + i |-\rangle), \quad |S_y; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - i |-\rangle). \quad (30)$$

Los operadores de subida y bajada se relacionan con S_x y S_y mediante

$$S_{\pm} = S_x \pm iS_y. \quad (31)$$

Los operadores de espín satisfacen las relaciones de conmutación

$$[S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k, \quad (32)$$

y, para espín 1/2, también

$$\{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2} \delta_{ij} I. \quad (33)$$

Definimos además el operador de espín total

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2. \quad (34)$$

Este operador conmuta con cada una de las componentes del espín: $[S^2, S_j] = 0$.

En la base de S_z , los estados pueden representarse matricialmente como

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Ejemplo de pregunta:

¿Qué es una simetría y por qué son importantes en mecánica cuántica?

Respuesta:

Las propiedades físicas de un sistema están representadas por operadores hermíticos, los observables, y una medición sólo puede arrojar uno de sus eigenvalores. Dos observables A y B son compatibles, es decir, pueden medirse simultáneamente sin destruir la información del otro, si y sólo si conmutan, $[A, B] = 0$. En ese caso comparten una base de eigenestados, y un estado $|a, b\rangle$ tiene bien definidos ambos valores.

Buscamos el mayor número de observables compatibles para extraer la máxima información del sistema. Si el eigenvalor de A es degenerado, el estado no queda completamente especificado; añadimos entonces un observable B que conmute con A y distinga los estados dentro de ese subespacio, y así sucesivamente hasta que $(a, b, c, \dots)$ caractericen al estado sin ambigüedad. Al conjunto máximo de observables que conmutan entre sí, $\{A, B, C, \dots\}$, cuyos eigenestados comunes forman una base completa del espacio de Hilbert, se le llama **Conjunto Completo de Observables que Conmutan (CCOC)**.

La dinámica de un sistema cuántico está gobernada por el Hamiltoniano a través de la ecuación de Schrödinger, así que $\hat{H}$ siempre forma parte del CCOC. Los demás elementos serán observables que conmuten con $\hat{H}$.

Falta identificar esos observables adicionales, y aquí entran las simetrías. Una transformación $T : S \rightarrow S'$ es de simetría si deja invariantes las propiedades medibles del sistema, es decir, si las probabilidades de transición no cambian: $|\langle \phi' | O' | \psi' \rangle|^2 = |\langle \phi | O | \psi \rangle|^2$. Estas transformaciones se

implementan mediante operadores unitarios U .

Toda transformación de simetría tiene asociado un generador G , que por ser U unitario resulta hermítico, $G^\dagger = G$:

En mecánica cuántica los generadores de las transformaciones de simetría son observables. Un observable invariante bajo la simetría que genera G satisface $[O, G] = 0$; en particular, si el sistema es simétrico bajo la transformación generada por G , el Hamiltoniano permanece invariante y $[\hat{H}, G] = 0$. Por el teorema de Noether, toda simetría global del sistema tiene además asociada una cantidad conservada.

Las simetrías nos dan justo esa pista: al ser observables que conmutan con $\hat{H}$, sus generadores son candidatos naturales para completar el CCOC.

Otros ejemplos de pregunta:

- *¿Cómo se define el momento angular en mecánica cuántica?*
- *¿Cómo es el acoplamiento espín-orbita?*
- *Describe la diferencia entre bosones y fermiones.*
- *¿Cuáles son los eigenvalores de energía para un sistema de n osciladores armónicos cuánticos independientes con frecuencia ω ? Explica por qué son así.*

5. Mecánica Estadística

Ejemplo de pregunta:

¿Qué es la función de distribución radial $g(r)$?

Respuesta:

En termodinámica solo podemos extraer información sobre las propiedades macroscópicas del sistema, pero en mecánica estadística partimos de una descripción microscópica, y no solo podemos recuperar la información macroscópica (termodinámica) si no que también podemos recuperar, en promedio, cierta información sobre cómo están organizadas las partículas a nivel microscópico. La función de distribución radial $g(r)$ es precisamente una herramienta que nos da esa información: nos dice cómo se acomodan las moléculas unas respecto a otras.

Concretamente, $g(r)$ mide la probabilidad relativa de encontrar una partícula a una distancia r de otra partícula dada, comparada con la de un gas ideal sin estructura alguna. Si tomamos un cascarón esférico de radio r y grosor dr centrado en una partícula, el número de partículas que esperamos encontrar ahí es

$$dN = \rho g(r) 4\pi r^2 dr$$

de modo que $g(r)$ no mide un número absoluto de partículas, sino cómo se compara la densidad local en ese cascarón con la densidad promedio del sistema. Si $g(r) = 1$ para toda r , las partículas están distribuidas uniformemente y no hay correlación espacial entre ellas.

Esta interpretación se vuelve muy clara si pensamos en los distintos estados de la materia:

En un gas ideal, las partículas no interactúan y se mueven al azar, así que no hay estructura: $g(r) \propto 1$, sin picos ni valles.

En un gas real, las partículas ya no pueden estar arbitrariamente cerca unas de otras, así que $g(r)$ cae a cero a distancias muy cortas, aunque el resto del comportamiento sigue siendo cercano al de un gas ideal.

En un líquido, cada átomo está rodeado de sus vecinos inmediatos. Por eso $g(r)$ es cero muy cerca de $r \rightarrow 0$, pero luego presenta un pico que refleja una alta probabilidad de encontrar una partícula a la distancia típica de su vecino más cercano. Conforme r crece, $g(r)$ oscila alrededor de 1, mostrando que las partículas se vuelven progresivamente no correlacionadas.

En un sólido, los átomos ocupan posiciones fijas en una red cristalina, así que siempre hay

un átomo a una distancia bien definida (típicamente $\sim 1 \text{ \AA}$), lo que se traduce en picos marcados de $g(r)$.

La importancia de $g(r)$ va más allá de lo conceptual: es una función que conecta directamente el modelo microscópico (el potencial de interacción entre partículas) con mediciones experimentales, ya que su transformada de Fourier nos da el factor de estructura, que es lo que se mide en experimentos de dispersión de neutrones o rayos X. Esto la vuelve una pieza central tanto en simulaciones moleculares como en la interpretación de experimental.

Otros ejemplos de preguntas:

- *Describe el concepto de microestado.*
- *¿Cómo se relaciona la entropía con el número de microestados?*
- *¿Qué es el Teorema ergódico y cuál es su importancia para el formalismo de los ensambles en mecánica estadística?*